Théorème et définition :

Fonction racine nième :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Lafonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque Strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine nième.

On a : $y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.

Lorsque $n = 2$ et pour x positif on note $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Conséquences :

Soient deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b. On a :

- $\sqrt[n]{a^n} = a$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$.
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Théorème :

Pour tout entier $n \geq 2$ et $p \geq 2$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a : $f'(x) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, pour tout $x > 0$.

TuniSchool.tn